

Гармонический четырёхугольник

18 июля

Опр. Дана окружность ω и произвольная точка P на ней. Двойным отношением $(AB; CD)$ четвёрки точек A, B, C, D на окружности ω называется двойное отношение четвёрки прямых PA, PB, PC и PD .

Если P совпадает с одной из данных точек, то секущая вырождается в касательную.

1. Проверьте следующие свойства:

- (а) Двойное отношение точек на окружности не зависит от выбора точки P ;
- (б) Численно оно равняется $\pm \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$;
- (в) Двойное отношение четырёх точек сохраняется при инверсии в точке P .
- (г) Сохраняется ли оно при инверсии в произвольной точке плоскости?

2. Через точку M , не лежащую на окружности, проводятся четыре секущие $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$. Докажите, что $(A_1A_2; A_3A_4) = (B_1B_2; B_3B_4)$.

3. **Теорема о бабочке.** Пусть через точку M , которая является серединой хорды PQ некоторой окружности, проведены две произвольные хорды AB и CD . Хорды AD и BC пересекают отрезок PQ в точках X и Y . Докажите, что точка M является серединой отрезка XY .

Опр. Вписанный четырёхугольник $ABCD$, для которого $(AC; BD) = -1$, называется гармоническим.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что следующие условия равносильны:

- (а) $ABCD$ — гармонический;
- (б) Произведения длин противоположных сторон равны;
- (в) Биссектрисы углов B и D пересекаются на прямой AC ;
- (г) Биссектрисы внешних углов при вершинах B и D пересекаются на прямой AC ;
- (д) Касательные, проведённые в точках A и C , пересекаются на прямой BD ;
- (е) Прямая BD симметрична медиане треугольника ABC относительно биссектрисы угла B .

5. Пусть PA и PB — касательные к окружности, CD — секущая, проходящая через точку P , точка M — середина отрезка AB , K — вторая точка пересечения CM с окружностью. Докажите, что PM, AD и BK пересекаются в одной точке.

6. В треугольнике ABC вписанная окружность ω касается сторон в точках A_1, B_1, C_1 . Чевiana BB_1 вторично пересекает окружность в точке K . Точка N является пересечением прямой C_1A_1 и касательной к ω в точке K . Докажите, что $\sin(\angle A_1CN) = \sin(2 \cdot \angle A_1C_1B_1)$.

- 7.** В окружности ω проведены две параллельные хорды AB и CD . Прямая, проведенная через C и середину AB , вторично пересекает ω в точке E . Точка K — середина отрезка DE . Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.
- 8.** В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность Ω , пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности Ω в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC , проведенную из вершины B .
- 9.** На плоскости зафиксирована окружность ω , точка A вне её и касательная AT . Через точку A проводится секущая XY , а затем строится окружность, которая проходит через точки T и X , а также касается прямой TY . Докажите, что все такие окружности проходят через фиксированную точку, отличную от T .
- 10.** Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая l перпендикулярна BC и проходит через B . Две окружности с общей хордой CD касаются прямой l в точках P и Q . Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины AB под равными углами.